Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 29, No. 9, pp. 1293–1300, 1986
Printed in Great Britain

0017–9310/86 $3.00+0.00
Pergamon Journals Ltd.

Convection mixte autour d'un cylindre horizontal. Influence des variations des propriétés physiques avec la température

M. AMAOUCHE et J.-L. PEUBE
L.E.S.T.E., 40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cédex, France

(*Reçu le* 4 *Février* 1985)

Résumé—L'influence des variations des propriétés physiques avec la température est étudiée sur un problème de convection mixte stationnaire, transversale autour d'un cylindre horizontal isotherme. Les équations de Navier–Stokes couplées avec l'équation de transport d'énergie sont écrites dans la formulation Ψ, ω, θ et résolues par une technique de différences finies. Les résultats, présentés dans les cas de l'eau et de l'air sont comparés à ceux précédemment obtenus à l'aide du modèle de Boussinesq.

1. INTRODUCTION

Les conditions d'applications de l'approximation de Boussinesq ont fait l'objet d'un grand nombre d'études fondamentales [1–4]. L'une des plus récentes est celle de Gray et Giorgini [5] qui discutent d'une manière générale la validité de cette approximation et fixent des conditions sous lesquelles elle demeure applicable à des fluides tels que l'eau et l'air.

Une abondante littérature existe aussi sur les problémes de convection où les chercheurs s'attachent à mettre en évidence l'importance des variations de toutes les propriétés physiques (ou de quelques unes seulement). Il est maintenant admis que les effets des variations de la viscosité sont prédominants pour des liquides à nombre de Prandtl élevé ou modéré.

Néanmoins dans le cas de l'eau, comme pour les gaz, il peut être nécessaire de tenir compte des variations des autres propriétés physiques. Par exemple, dans le cas des liquides, le chauffage d'une paroi constitue un moyen pratique de stabiliser l'écoulement dans une couche limite et donc de retarder la transition vers l'état turbulent. Cela résulte de l'accroissement des termes convectifs, conséquence de la diminution de la viscosité. Le phénomène inverse se produit pour les gaz.

Aroesty et Berger [6] ont montré que le chauffage des parois conduit á des effets qualitativement semblables à ceux de l'aspiration quand la viscosité décroît avec la température. Les calculs de Wazzan *et al.* [7], effectués sur un modèle de couche limite soumise à un gradient de pression adverse montrent que la diminution de la viscosité retarde la séparation. Cependant, l'écoulement secondaire, induit inévitablement par les poussées d'Archimède le long d'obstacles axisymétriques chauffés est générateur d'instabilités. Des solutions semblables ont été proposées par Yao et Catton [8] pour un écoulement faiblement tridimensionel dans une couche limite de convection mixte le long d'un cylindre horizontal. Les résultats de ces auteurs montrent clairement que les effects de l'écoulement secondaire conduisent à un accroissement du transfert de chaleur et de la stabilité de la couche limite sur la partie inférieure du cylindre. Ces mêmes effets destabilisent la couche limite et diminuent les échanges thermiques sur la moitié supérieure du cylindre.

Dans un travail ultérieur, Yao et Catton [9] incluent les effets des variations de la viscosité. L'influence combinée de la viscosité variable et de l'écoulement secondaire sur le transfert thermique et la stabilité de la couche limite y est discutée.

En présence d'un gradient de pression favorable [10], la diminution de la viscosité contribue à la réduction des effets de l'écoulement secondaire et à l'accroissement des gradients de pression.

Carey et Mollendorf [11] ont donné l'expression générale de la viscosité en fonction de la température pour laquelle il existe des solutions semblables au problème de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale isotherme. Ces auteurs présentent des résultats numériques pour un modèle linéaire de viscosité et des nombres de Prandtl variant de 1 à 1000.

Dans un article plus récent, Carey et Mollendorf [12] présentent des résultats, déduits d'une analyse de perturbation, pour trois types de convection naturelle dans des liquides à viscosité variable.

Les effets de variation de la viscosité ont également été analysés par Hong et Bergles [13] à l'aide d'un calcul intégral sur un écoulement de convection mixte dans un tube horizontal. Leurs résultats théoriques et expérimentaux attestent que l'effet de variation de la viscosité conduit à une amélioration du transfert pouvant atteindre 50%.

Poots et Ragett [14, 15] tiennent compte, dans leur analyse, des effets de la température sur toutes les caractéristiques physiques du fluide (eau) dans plusieurs configurations d'écoulements forcés.

Barrow et Sitharamarao [16] ont étudié l'influence des variations du coefficient de dilatation β sur le transfert de chaleur en convection naturelle le long d'une plaque verticale. Cette étude fût reprise et

NOMENCLATURE

C_x, C_y coefficients de trainée et de portance
C_p chaleur spécifique à pression constante
D divergence de la vitesse
$\bar{\mathbf{D}}$ tenseurs des déformations
g accélération de la pesanteur
$G(y) = \pi \exp(\pi y)$
Gr Nombre de Grashof, $8g\beta_m \Delta T R^3 \rho_\infty^2 \mu_m^2$
$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ vecteurs unitaires
Nu nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$ nombre de Nusselt global
$\overline{Nu}_f$ nombre de Nusselt global en convection forcée
P pression réduite
Pr nombre de Prandtl, $\mu_m C_P/\lambda_m$
R rayon du cylindre
Re nombre de Reynolds, $2\rho_\infty U_\infty R/\mu_m$
r_ω paramètres de relaxation
T température dimensionnelle
ΔT écart de température, $T_p - T_\infty$
U_∞ vitesse de l'écoulement uniforme
(u, v) composantes de vitesse
$\mathbf{V}$ vitesse locale
(X, r) coordonnées polaires
(X_1, Y_1) coordonnées cartésiennes
(x, y) coordonnées polaires logarithmiques
$(\Delta x, \Delta y)$ pas de discrétisation.

Symbols grecs
β coefficient de dilatation à pression constante
β_0 coefficient défini par (5)
ε précision du test de convergence
ρ masse volumique
μ viscosité dynamique
λ conductibilité thermique
ν, σ paramètres définis par (13)
Ψ fonction de courant réduite
ω vorticité réduite
θ température réduite
τ_Ψ pas de temps fictif.

Indices supérieurs
n itération externe
l itération interne
$\sim$ caractérise les grandeurs adimensionnelles
$*$ relatif au premier demi-pas.

Indices inférieurs
(i, j) représente la valeur d'une fonction au point (x_i, y_j)
m relatif aux grandeurs évaluées à la température moyenne
p relatif à la paroi
∞ relatif à l'écoulement lointain
x (respect y) représente la dérivée par rapport à x (respect y).

complètée par Brown [17] qui tient compte des variations, de type exponentiel, de la masse volumique. Cet auteur utilise une méthode intégrale et conclut que l'influence des variations de β est nettement plus importante que celle des autres propriétés physiques dans les problèmes de convection naturelle.

Piau [18] considère à la fois les variations, de type linéaire, de la viscosité et du coefficient de dilatation et montre l'existence de solutions semblables en convection naturelle sur plaque verticale, à condition toutefois que la température de paroi soit uniforme. Cet auteur constate que l'influence de la température est importante aussi bien sur μ que sur β dans le cas de l'eau, et demeure négligeable sur β pour des fluides à grands nombres de Prandtl.

Plus tard, ce même auteur [19] inclue les effets de la stratification thermique et met en évidence l'influence de la température sur le nombre de Rayleigh critique caractérisant la transition vers la turbulence.

Dans certains procédés industriels, les écarts de température mis en jeu peuvent atteindre des centaines de degrés. C'est pour des températures de paroi variant de 66 à 1093°C que Choi [20] résoud tout récemment les problèmes des couches limites de convection forcée dans l'air, autour d'un cylindre et le long d'une plaque plane. L'influence des effets de la température de paroi y est mise en évidence sur les évolutions du Nusselt et du coefficient de frottement.

La présente étude consiste en l'évaluation des modifications apportées par les variations des propriétés physiques sur les caractéristiques essentielles d'un écoulement de convection mixte transversale autour d'un cylindre horizontal isotherme.

Le problème sera supposé laminaire et stationnaire et c'est la raison pour laquelle les nombres de Reynolds sont pris volontairement faibles ($Re \leqslant 40$). Les nombres de Grashof considérés correspondent à des régimes allant de la convection forcée à la convection mixte.

$$0 \leqslant Gr \leqslant 5 \cdot Re^2.$$

2. FORMULATION

2.1. *Variations des propriétés physiques*

Dans la présente étude, nous nous intéressons principalement à l'eau et à l'air. Les variations de leurs propriétés physiques avec la température sont assez bien connues. On note en particulier que leur chaleur spécifique change très peu avec la température. Les variations de toutes les autres propriétés physiques (masse volumique, coefficient de dilatation, viscosité et conductibilité thermique) sont relativement importantes et seront prises en considération. Si l'on convient que ces approximations sont exactes pour $\theta = 0$, 0,5 et 1, on obtient, popur les grandeurs réduites

$$\tilde{\mu}(\theta) = \mu(\theta)/\mu_m, \quad \tilde{\lambda}(\theta) = \lambda(\theta)/\lambda_m \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}(\theta) = \rho(\theta)/\rho_\infty$$

les représentations à deux paramètres:

$$\tilde{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}_\infty + (4-\tilde{\mu}_p - 3\tilde{\mu}_\infty)\theta + 2(\tilde{\mu}_p + \tilde{\mu}_\infty - 2)\theta^2 \quad (1)$$

$$\tilde{\lambda}(\theta) = \tilde{\lambda}_\infty + (4-\tilde{\lambda}_p - 3\tilde{\lambda}_\infty)\theta + 2(\tilde{\lambda}_p + \tilde{\lambda}_\infty - 2)\theta^2 \quad (2)$$

$$\tilde{\rho}(\theta) = 1 - \beta_m \Delta T \cdot \tilde{\beta}(\theta) \quad (3)$$

$$\tilde{\beta}(\theta) = [2-(\beta_0/2)]\theta + (\beta_0 - 2)\theta^2 \quad (4)$$

$$\text{avec } \beta_0 = \frac{1-\tilde{\rho}_p}{1-\tilde{\rho}_m} \quad (5)$$

θ est la température réduite $(T-T_\infty)/(T_p-T_\infty)$; β_m peut s'interpréter comme le coefficient de dilatation moyen évalué à la température du film; il est donné par la relation

$$\beta_m \Delta T = 2(1-\tilde{\rho}_m). \quad (6)$$

2.2. *Equations de base*

Le probléme est formulé à l'aide des variables Ψ, ω et θ; sa géométrie est schématisée sur la Fig. 1.

La fonction de courant Ψ et la vorticité ω sont définies à partir de la vitesse $\mathbf{V}$ par les relations:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{V} &= \omega \cdot \mathbf{K} \\ \tilde{\rho}(\theta) \cdot \mathbf{V} &= \nabla \wedge \Psi \mathbf{K} \end{aligned} \quad (7)$$

($\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$) dédigne une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Dans cette formulation, les équations de Navier–Stokes couplées avec l'équation de transport de l'énergie s'écrivent:

$$\tilde{\rho} \cdot \omega + \Delta\Psi = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta} \nabla\theta \cdot \nabla\Psi \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla\omega \wedge \nabla\Psi - v\left(\tilde{\mu}\Delta\omega + \frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\nabla\theta\cdot\nabla\omega\right)\mathbf{K} &= \nabla\theta \wedge \left[\sigma\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\theta}\mathbf{J} - \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta}\nabla(\mathbf{V}^2/2)\right] \\ &+ v\left\{\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}[\nabla \wedge (2\bar{D}\cdot\nabla\theta) + 2\nabla\theta \wedge \nabla D] + \frac{\partial^2\tilde{\mu}}{\partial\theta^2}\nabla\theta \wedge (2\bar{D}\cdot\nabla\theta)\right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$(\nabla\theta \wedge \nabla\Psi)\cdot\mathbf{K} = \frac{v}{Pr}\left[\tilde{\lambda}\cdot\Delta\theta + \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\theta}(\nabla\theta)^2\right] \quad (10)$$

D désigne la divergence de la vitesse, elle est donnée par l'expression

$$D = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta}(\nabla\theta \wedge \nabla\Psi)\cdot\mathbf{K} \quad (11)$$

$\bar{D}$ est le tenseur taux des déformations qui, dans le

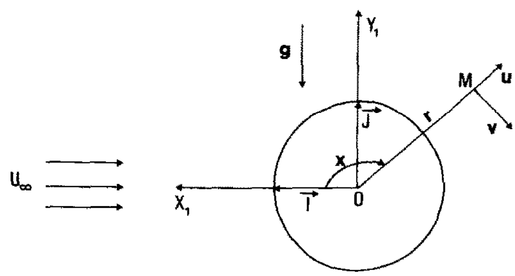

FIG. 1. Géométrie du problème.

système de coordonnées polaires (r, X), s'écrit:

$$\bar{D} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{\omega}{2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{\omega}{2} & D - \dfrac{\partial u}{\partial r} \end{Vmatrix}. \quad (12)$$

Les équations (8)–(10) sont écrites en variables réduites. Le rayon R du cylindre et la vitesse U_∞ de l'écoulement uniforme ont servi de grandeurs de référence. C'est ainsi que l'on y fait apparaître les paramètres fondamentaux:

$$v = \frac{2}{Re}; \quad \sigma = \frac{1}{2}\frac{Gr}{Re^2}; \quad Pr = \frac{\mu_m C_p}{\lambda_m}. \quad (13)$$

Re et Gr sont les nombres de Reynolds et de Grashof basés sur le diamètre du cylindre.

$$Re = 2U_\infty R\rho_\infty/\mu_m, \quad Gr/Re^2 = 2g\beta_m\Delta TR/U_\infty^2. \quad (14)$$

2.3. *Equations transformées*

Les équations vectorielles (8)–(10) sont écrites dans un système de coordonnées logarithmiques polaires dont les avantages sont évidents. Elles sont reliées aux coordonnées polaires (r, X) par les relations:

$$x = X/\pi, \quad y = \log r/\pi. \quad (15)$$

On obtient:

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \tilde{\rho}G^2\omega - \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta}(\Psi_x\theta_x + \Psi_y\theta_y) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\left(\Psi_x - 2v\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\theta_y\right)\omega_y - \left(\Psi_y + 2v\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\theta_x\right)\omega_x \\ &\quad + v\left\{\left[\frac{\partial^2\tilde{\mu}}{\partial\theta^2}(\theta_y^2 - \theta_x^2) + \frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}(\theta_{yy} - \theta_{xx} - \pi\theta_y)\right] \times \omega - \tilde{\mu}(\omega_{xx} + \omega_{yy})\right\} \\ &= \sigma\cdot G\frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\theta}(\cos\pi x\cdot\theta_y - \sin\pi x\cdot\theta_x) \\ &\quad - \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\theta}[\theta_y(u\cdot u_x + v\cdot v_x) - \theta_x(u\cdot u_y + v\cdot v_y)] \\ &\quad + \frac{2v}{G}\left\{\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}[v_y(\theta_{yy} - \theta_{xx}) + \theta_{xy}(G\cdot D - 2u_y) + G\cdot D_x D_y + \theta_x(\pi u_y - GD_y - \pi GD)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2\tilde{\mu}}{\partial\theta^2}[v_y(\theta_y^2 - \theta_x^2) + \theta_x\theta_y(G\cdot D - 2u_y)]\right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Psi_x\theta_y-\Psi_y\theta_x=\frac{\nu}{Pr}\left[\tilde{\lambda}(\theta_{xx}+\theta_{yy})+\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\theta}(\theta_x^2+\theta_y^2)\right]. \quad (18)$$

u et v sont les composantes de vitesse selon les directions radiale et azimutale et $G=\pi\exp(\pi y)$. Les conditions aux limites sur les variables Ψ et ω se déduisent des conditions physiques d'adhérence à la paroi et d'uniformité de l'écoulement non perturbé. Elles s'écrivent :

$$y=0 \quad \text{et} \quad \Psi=0;\ \tilde{\rho}\cdot\pi^2\cdot\omega+\Psi_{yy}=0,\quad \theta=1$$

$$y\to\infty \quad \text{et} \quad \Psi\to-\exp(\pi y)\sin\pi x,\quad \omega\to 0,\quad \theta\to 0. \quad (19)$$

2.4. *Résolution numérique*

Le problème continu (16)–(19) est remplacé par un problème discret par l'utilisation d'une technique de différences finies. Le passage à la formulation discrète est effectué en remplaçant les opérateurs différentiels par des différences centrées du second ordre. Le réseau est défini par l'ensemble des noeuds :

$$(x_i,y_j)=[(i-1)\Delta x,\quad (j-1)\Delta y] \quad i=1,\ldots,60;\quad j=1,\ldots,40$$

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, la résolution de l'équation de continuité à l'aide d'un schéma hermitien compact, dans la mise en oeuvre de la procédure ADI optimisée, se ramène à l'inversion de systèmes linéaires tridiagonaux classiques ou cycliques [21]. L'utilisation de cette méthode se trouve alourdie par la présence du terme de température, où apparaissent des dérivées premières de Ψ, qui se traduit par un couplage des systèmes linéaires en Ψ et ses dérivées premières et secondes. Malgré la possibilité d'éliminer les dérivées premières ou secondes par l'intermédiaire des relations additionnelles, la procédure conduirait cependant à la résolution d'un système tridiagonal par blocs dont l'inversion demanderait un encombrement mémoire et des temps de calcul assez importants. Ces raisons nous ont conduit à utiliser, au détriment de la précision, une méthode classique d'ordre 2.

Les équations de transport de la vorticité et de l'énergie et l'équation de continuité sont traitées par la méthode des faux transitoires développée par Mallinson et Vahl Davis [22]. L'avancement dans le temps est réalisé par la technique des pas fractionnaires, type ADI. Cette méthode présente par rapport aux méthodes classiques dans lesquelles les opérateurs ne sont pas décomposés, le double avantage de conduire à des systèmes de plus faible dimension et de converger plus rapidement grâce à des choix optimaux des pas de temps fictifs.

A chaque itération globale numérotée 'n' on inclue un processus itératif interne, d'indice 'l', pour la résolution de l'équation de continuité. La décomposition conduit successivement aux étapes suivantes :

$$\frac{\Psi^{n,*}-\Psi^{n,l}}{\tau_\Psi}+\frac{1}{\tilde{\rho}^n}\frac{\partial\tilde{\rho}^n}{\partial\theta}(\Psi_x^{n,*}\theta_x^n+\Psi_y^{n,l}\theta_y^n)=\Psi_{xx}^{n,*}+\Psi_{yy}^{n,l}+\tilde{\rho}^n\cdot G^2\cdot\omega^n \quad (20)$$

$$\frac{\Psi^{n,l+1}-\Psi^{n,*}}{\tau_\Psi}+\frac{1}{\tilde{\rho}^n}\frac{\partial\tilde{\rho}^n}{\partial\theta}(\Psi_x^{n,*}\theta_x^n+\Psi_y^{n,l+1}\theta_y^n)=\Psi_{xx}^{n,*}+\Psi_{yy}^{n,l+1}+\tilde{\rho}^n\cdot G^2\cdot\omega^n. \quad (21)$$

Les essais numériques montrent que le nombre d'itérations internes nécessaire pour satisfaire un critère de convergence sur Ψ^n diminue rapidement quand n augmente. La convergence de Ψ^n n'est alors pas exigée à chaque itération globale et on ne considère qu'un nombre limité d'itérations internes [23].

Les équations (17) et (18) sont résolues de la même manière que l'équation de continuité. La solution stationnaire est supposée atteinte quand les suites $\theta_{i,j}^n$ et $\omega_{i,j}^n$ convergent. Le critère de convergence retenu pour l'arrêt du processus itératif est basé sur la norme du maximum :

$$\sup(\max_{i,j}|\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^n|,\quad \max_{i,j}|\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^n|)<\varepsilon. \quad (22)$$

ε est un petit paramètre que l'on a choisi égal à 10^{-4}. Un test plus sévère augmente le temps de calcul, sans modification sensible des résultats.

2.5. *Traitement des conditions aux limites*

(*a*) *A la paroi.* A niveau de la paroi, le seul problème qui reste encore posé consiste à préciser la valeur de la vorticité. Plusieurs relations, toutes déduites d'un développement de Taylor de l'équation de continuité au voisinage de la paroi, sont disponibles dans la littérature. Nous avons utilisé, pour notre part, la relation explicite de Jensen qui s'écrit :

$$\tilde{\rho}(1)\cdot\pi^2\cdot\omega_{i,1}=\frac{1}{2\Delta y^2}(\Psi_{i,3}-8\Psi_{i,2})+O(\Delta y^2). \quad (23)$$

L'application de cette relation conduit à des instabilités numériques même dans des problèmes purement conductifs [24]. L'introduction d'un paramètre de sous relaxation $0<r_\omega<1$, conformément à l'expression (24), semble nécessaire pour rétablir la stabilité.

$$\omega_{i,1}^{n+1}=r_\omega\cdot\omega_{i,1}+(1-r_\omega)\omega_{i,1}^n. \quad (24)$$

Briley [25] note par ailleurs, que la stabilité et la précision se trouvent augmentées si l'on utilise, près des parois, des expressions de vitesse compatibles avec la relation (23).

(b) *A la frontière extérieure.* Aux faibles nombres de Reynolds, les conditions d'uniformité de l'écoulement ne peuvent être rigoureusement appliquées qu'à de grandes distances de l'obstacle. L'application de ces conditions conduirait à des résultats dépendant fortement du rayon de la frontière extérieure si celui-ci n'est pas pris suffisamment grand. L'étude du comportement asymptotique de l'écoulement permet de limiter le domaine d'intégration numérique et de réduire alors notablement les temps de calcul.

Nous avons montré, en suivant la démarche proposée par Imai [26], que l'influence de la température n'intervient pas, dans une première approximation, sur le comportement asymptotique de la vorticité qui reste semblable à celui de la température.

Pour la vorticité et la température, nous avons donc utilisé les solutions d'ordre un, données par Imai, celles-ci reviennent à imposer des conditions, de type gradient non nul, qui s'écrivent :

$$\omega(x, y_\infty) = \omega(x, y_\infty - \Delta y) \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\pi\Delta y + Re\cdot\Delta r\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\right] \quad (25)$$

$$\theta(x, y_\infty) = \theta(x, y_\infty - \Delta y) \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\pi\Delta y + Pr\cdot Re\cdot\Delta r\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\right]. \quad (26)$$

Pour la fonction de courant, sa valeur à la frontière extérieure est prise égale à celle qu'elle aurait dans un écoulement potentiel

$$\Psi(x, y_\infty) = -2\sinh\pi y_\infty\cdot\sin\pi x. \quad (27)$$

3. RESULTATS

L'influence des variations des propriétés physiques est étudiée aussi bien sur l'eau ($Pr = 4$) que sur l'air ($Pr = 0{,}72$), pour une même température de paroi, de l'ordre de 90°C. Les calculs ont été entrepris pour diverses valeurs du nombre de Reynolds ($Re = 5, 10, 20, 40$) et du paramètre de convection mixte ($Gr/Re^2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Les effets de ces paramètres sur la distribution des grandeurs locales se traduisent sensiblement de la même manière que sur un fluide de Boussinesq. Les résultats ne seront ainsi présentés que pour un couple de valeurs caractéristiques : $Re = 20$, $Gr/Re^2 = 4$.

Signalons toutefois, qu'en convection forcée, l'influence de la température sur la viscosité fait naître un sillage à $Re = 5$ quand $Pr = 0{,}72$; l'écoulement reste rampant quand $Pr = 4$.

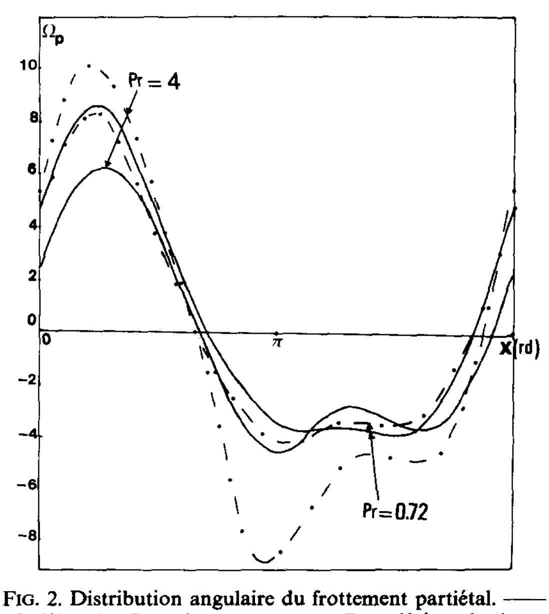

FIG. 2. Distribution angulaire du frottement partiétal. —— Modèle de Boussinesq. ·—·—· Propriétés physiques variables.

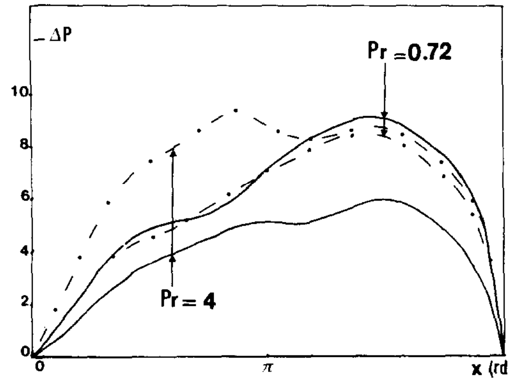

FIG. 3. Distribution angulaire de la pression pariétale. Legende comme Fig. 2.

La Fig. 2 met clairement en évidence l'influence profonde du nombre de Prandtl sur la répartition du frottement pariétal. Les effets de variations des propriétés physiques sont très significatifs pour l'eau mais relativement faibles pour l'air. Bien que l'allure générale des courbes soit conservée, des écarts notables dus aux variations combinées des propriétés physiques sont observés essentiellement aux niveaux des extrémums. Aussi bien pour l'eau que pour l'air, l'intersection de la ligne médiane du panache ($\Psi = 0$) avec l'obstacle, définissant le point de séparation, est légèrement déplacée vers le haut. En ce qui concerne la position du point de stagnation, celle-ci dépend beaucoup du nombre de Prandtl. Quand ce dernier augmente, le point de stagnation se rapproche du point d'arrêt amont de l'écoulement forcé. Le rapprochement est plus accentué dans l'approximation de Boussinesq. Dans le cas de l'air, sa position reste pratiquement indifférente aux variations des propriétés physiques.

La Fig. 3 représente la répartition, le long de la paroi, de la pression dont l'expression est donnée en annexe. On constate que pour $Pr = 0{,}72$, l'approximation de Boussinesq demeure acceptable.

Au contraire, dans le cas de l'eau, la prise en compte des variations des propriétés physiques, fait apparaître des écarts pouvant atteindre 40%. C'est dans la zône proche du panache que ces écarts sont les plus importants.

Le nombre de Nusselt local, lié au gradient normal de température par la relation $Nu = -(2/\pi)(\partial\theta/\partial y)$, nous renseigne sur la qualité de l'échange autour de l'obstacle. Ses variations, le long de la paroi, sont représentées sur la Fig. 4 d'où il ressort que les variations des propriétés physiques n'affectent que légèrement l'échange. On remarque toutefois une différence fondamentale entre l'air et l'eau. Pour l'air, le modèle de Boussinesq surestime l'échange presque partout sauf dans une région située à l'aval, à proximité du panache. Dans cette zône le transfert de chaleur n'est

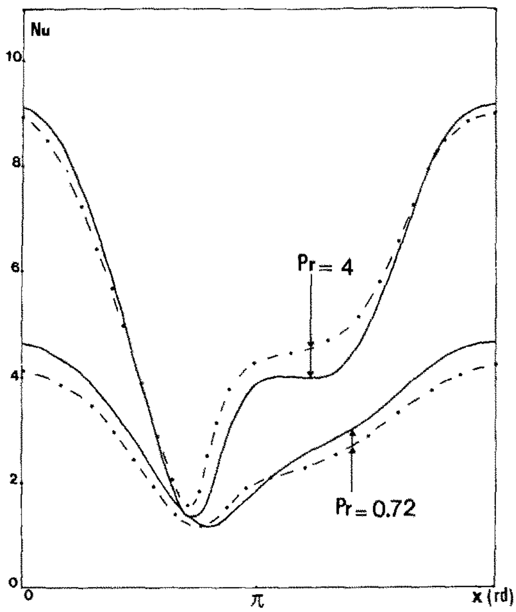

FIG. 4. Distribution angulaire du nombre de Nusselt local. Legende comme Fig. 2.

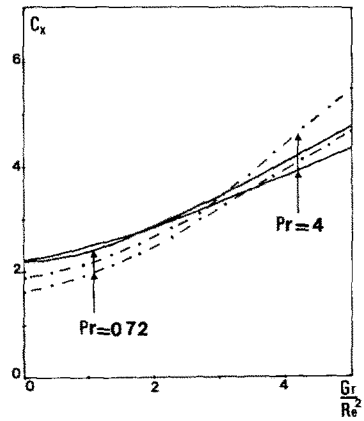

FIG. 6. Variations de la trainée en fonction de Gr/Re^2. Legende comme Fig. 2.

pas sensiblement modifié par les variations des propriétés physiques. A l'amont, les écarts sont au contraire relativement importants. Pour l'eau, les variations des propriétés physiques ont pour conséquence une amélioration assez significative de l'échange sur la face arrière; sur la face amont, ces variations détériorent faiblement l'échange.

On constate aussi, que dans tous les cas, l'échange est minimum au point de séparation et atteind son maximum au point d'arrêt amont de l'écoulement forcé.

Une comparaison est également considérée sur l'évolution des grandeurs globales en fonction du paramètre de la convection mixte.

Sur la Fig. 5, où l'on a reporté le Nusselt global rapporté à celui de la convection forcée $\overline{Nu}_f$, on constate que les variations des propriétés physiques conduisent à une amélioration globale de l'échange relatif, d'autant plus importante que Gr/Re^2 est grand. On remarque également que l'échange relatif devient plus élevé pour l'air que pour l'eau, à partir d'une valeur critique, de l'ordre de 3, du paramètre Gr/Re^2.

En ce qui concerne les actions subies par l'obstacle, on peut faire les remarques suivantes:

Les variations des propriétés physiques se traduisent par une diminution de la trainée (Fig. 6) quand $Pr = 0.72$. Cette diminution est d'autant plus importante que le paramètre Gr/Re^2 est petit. Quand $Pr = 4$, ce n'est qu'à partir d'une valeur, de l'ordre de 3, du paramètre Gr/Re^2 que la trainée devient plus grande que celle calculée dans l'approximation de Boussinesq.

Quant à la portance, représentée sur la Fig. 7, son évolution est marquée par:

— une croissance relativement lente pour les fluides de Boussinesq
— une croissance rapide, plus significative encore pour l'eau que pour l'air, quand les variations des propriétés physiques sont prises en compte.

4. CONCLUSION

Dans l'air, et quand les écarts de températures sont modérés (quelques dizaines de degrés); le modèle de

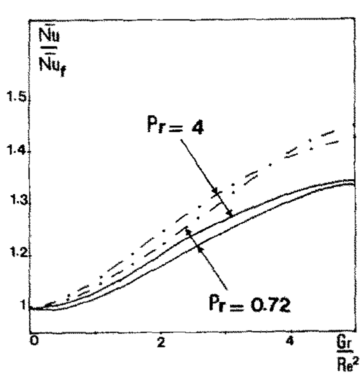

FIG. 5. Variations du nombre de Nusselt global relation en fonction de Gr/Re^2. Legende comme Fig. 2.

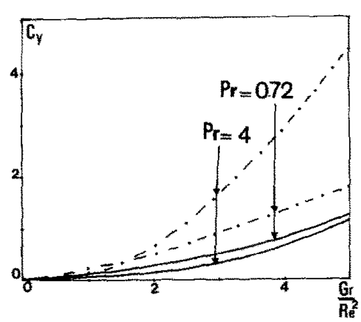

FIG. 7. Variations de la portance en fonction de Gr/Re^2. Legende comme Fig. 2.

Boussinesq constitue une approximation suffisante pour l'évaluation des grandeurs caractéristiques d'un écoulement de convection mixte.

Dans le cas de l'eau, cette étude fait ressortir la nécessité de tenir compte des variations des propriétés physiques avec la température. L'influence conjuguée de ces variations apparaît essentiellement dans la distribution des grandeurs dynamiques, locales et globales ; elle se manifeste par des écarts notables par rapport aux grandeurs calculées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

REFERENCES

1. E. A. Spiegel and G. Veronis, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophys. Jl* **131**, 442–447 (1960).
2. J. M. Mihaljan, A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid, *Astrophys. Jl* **136**, 1126–1133 (1962).
3. W. V. R. Malkus, Boussinesq equations, *Notes on the* 1964 *Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics at the Woods Hole Oceanographic Institution*, Vol. 1, pp. 1–12. U.S. National Technical Information Service, PB 186314 (1964).
4. W. V. R. Malkus, A scaling and expansion of equations of motion to yield the Boussinesq equation, *Notes on the* 1969 *Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics*, Vol. 1, pp. 23–28 (1969).
5. D. D. Gray and A. Giorgini, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 545–551 (1976).
6. J. Aroesty and S. A. Berger, Controlling the separation of laminar boundary layers in water: heating and suction. The Rand Corporation, R-1789-ARPA, (September 1975).
7. A. R. Wazzan, T. T. Ovamura and A. M. O. Smith, The stability and transition of heated and cooled incompressible laminar boundary layers, *Proc. Fourth Int. Heat Transfer Conference*, Vol. 2, Paris, Versailles (1970).
8. L. S. Yao and I. Catton, Buoyancy crossflow effects on longitudinal boundary layer flow along a heated horizontal hollow cylinder, *Trans. Am. Soc. mech. Engrs*, Series C, *J. Heat Transfer* **99**, 122–124 (1977).
9. L. S. Yao and I. Catton, The buoyancy and variable viscosity effects on a water laminar boundary layer along a heated longitudinal horizontal cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 407–414 (1978).
10. L. S. Yao, Variable viscosity effect on the laminar water boundary layer on heated cones, *J. appl. Mech.* **45**, 481–486 (1978).
11. V. P. Carey and J. C. Mollendorf, Natural convection in liquids with temperature dependent viscosity, *Proc. Sixth Int. Heat transfer Conference*, Toronto, Vol. 2, pp. 211–217 (1978).
12. V. P. Carey and J. C. Mollendorf, Variable viscosity effects in several natural convection flows, *Int. J. Heat transfer* **23**, 95–109 (1980).
13. S. W. Hong and A. E. Bergles, Theoretical solutions for combined forced and free convection in horizontal tubes with temperature dependent viscosity, *J. Heat Transfer* **98**, 459–465 (1976).
14. G. Poots and G. F. Ragett, Theoretical results for variable property, laminar boundary layers in water, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 597–610 (1967).
15. G. Poots and G. F. Ragett, Theoretical results for variable property, laminar boundary layers in water with adverse pressure gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1513–1534 (1968).
16. H. Barrow and J. L. Sitharamarao, The effect of variable β on free convection, *Br. chem. Engng* **16**, 704 (1971).
17. A. Brown, The effect on laminar free convection Heat transfer of the temperature dependence of the coefficient of volumetric expansion, *J. Heat Transfer* **97**, 133–135 (1975).
18. J. M. Piau, Convection naturelle laminaire en régime permanent dans les liquides. Influence des propriétés physiques avec la température, C.r. Acad. Sc. Paris, **271A**, 953–956 (1970).
19. J. M. Piau, Influence des variations des propriétés physiques et de la stratification en convection naturelle, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 465–476 (1974).
20. I. G. Choi, The effect of variable properties of air on the boundary layer for a moving continuous cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 597–602 (1982).
21. M. Amaouche and J-L. Peube, Convection mixte stationnaire autour d'un cylindre horizontal, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 1263–1279 (1985).
22. G. D. Mallinson and G. de Wahl Davis, The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations, *J. comp. Phys.* **12**, 435–461 (1973).
23. P. Bontoux, B. Forestier et B. Roux, Analyse et optimisation d'une méthode de haute précision pour la résolution des équations de Navier Stokes instationnaires, *J. Mec. Appl.* **2**, 291–316 (1978).
24. P. J. Roache, The Lad, Nos, and Split. Nos methods for the steady state Navier–Stokes equations, *Comput. Fluids* **3**, 179–195 (1975).
25. W. R. Briley, A numerical study of laminar separation bubble using the Navier–Stokes Equations, United Aircraft Research Laboratories, East Hartford, CT, Report J. 110614–1 (1970).
26. I. Imai, On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox, *Proc. R. Soc.* **A208**, 487–516 (1951).

ANNEXE

1. *Calcul de la pression à la paroi*

Compte tenu des conditions d'adhérence, l'équation du mouvement projetée sur la paroi s'écrit ;

$$\frac{1}{2}\pi\frac{\partial P}{\partial x} = \pi^2\sigma\tilde{\beta}(1)\cos\pi x + v\left[\tilde{\mu}(1)\left(v_{yy} + \frac{1}{3}u_{xy}\right) + \frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\theta_y v_y\right] \tag{A1}$$

P désigne la pression réduite rapportée à la pression de référence $\rho_\infty U_\infty^2/2$

$$\text{avec: } v_y = \pi\omega(x,0)$$
$$v_{yy} = \pi\omega_y(x,0) \tag{A2}$$
$$u_{xy} = D_x(x,0) = 0.$$

L'équation (A1) devient, en utilisant les relations (A.2):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x} = \pi\sigma\tilde{\beta}(1)\cdot\cos\pi x + v\left[\tilde{\mu}(1)\cdot\omega_y + \frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\theta_y\cdot\omega\right]. \tag{A3}$$

L'intégration de (A3) donne la répartition de la différence de pression $\Delta P = P(x,0) - P(0,0)$

$$\Delta P = 2\sigma\tilde{\beta}(1)\sin\pi x + 2v\int_0^x\left(\tilde{\mu}(1)\cdot\omega_y + \frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\theta}\theta_y\cdot\omega\right)dx. \tag{A4}$$

2. *Calcul des actions exercées sur l'obstacle*

Les efforts subis par l'obstacle sont caractérisés par les coefficients de trainée C_x et de portance C_y définis par les relations:

$$C_x = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2} P \cos \pi x + \nu \tilde{\mu}(1)\omega \sin \pi x\right) dx \quad (A5)$$

$$C_y = \pi \int_0^2 \left(\nu \tilde{\mu}(1)\omega \cos \pi x - \frac{1}{2} P \sin \pi x\right) dx. \quad (A6)$$

L'intégration par partie des relations (A5) et (A6) conduit, en utilisant l'équation (A3), aux formules:

$$C_x = \nu \int_0^2 \left[\tilde{\mu}(\pi\omega - \omega_y) - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \theta} \theta_y \cdot \omega\right] \sin \pi x \cdot dx \quad (A7)$$

$$C_y = \nu \int_0^2 \left[\tilde{\mu}(\pi\omega - \omega_y) - \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \theta} \theta_y \cdot \omega\right] \cos \pi x \cdot dx - \pi\sigma\tilde{\beta}(1). \quad (A8)$$

VARIABLE PROPERTIES EFFECTS ON MIXED CONVECTION FLOW ABOUT A HORIZONTAL CYLINDER

Abstract—The effects of variable properties with temperature are considered on a transverse mixed convection problem about an horizontal and isothermal circular cylinder. The problem is supposed laminar and stationary. The Navier–Stokes equations, coupled with the transport energy equation are written in the (Ψ, ω, θ) formulation and solved by a finite difference technique. The results, presented for air and water are compared with those obtained by using the Boussinesq approximation.

AUSWIRKUNGEN VERÄNDERLICHER STOFFEIGENSCHAFTEN AUF DIE MISCHKONVEKTION UM EIN HORIZONTALES ROHR

Zusammenfassung—Die Auswirkungen der temperaturabhängigen Stoffeigenschaften auf ein Problem der Mischkonvektion um ein querangeströmtes, horizontales, isothermes, kreisförmiges Rohr werden betrachtet. Es werden laminare und stationäre Verhältnisse angenommen. Die Navier–Stokes-Gleichungen, gekoppelt mit der Energietransportgleichung, werden in der (ψ, ω, θ) Formulierung geschrieben und mit einer Finite-Differenzen-Methode gelöst. Die Ergebnisse, dargelegt für Luft und Wasser, werden mit Werten verglichen, die mit der Boussinesq-Approximation ermittelt wurden.

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ НА СМЕШАННУЮ КОНВЕКЦИЮ ОКОЛО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

Аннотация—Рассматривается эффект изменения свойств среды с температурой в задаче о поперечной смешанной конвекции около горизонтального изотермического кругового цилиндра. Течение предполагается ламинарным и стационарным. Уравнения Навье–Стокса вместе с уравнением переноса энергии записаны в переменных Ψ, ω, θ и решаются методом конечных разностей. Результаты для воздуха и воды сравниваются с результатами, полученными с использованием аппроксимации Буссинеска.